

ФАХОВИЙ КОЛЕДЖ РАКЕТНО-КОСМІЧНОГО МАШИНОБУДУВАННЯ
ДНІПРОВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ імені ОЛЕСЯ ГОНЧАРА

МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

дисципліна «Дискретна математика»

спеціальність 123 Комп'ютерна інженерія

освітньо-професійна програма Обслуговування комп'ютерних систем і мереж

Дніпро

2023

Практичне заняття

з навчальної дисципліни Дискретна математика

Тема Операції над множинами та їх властивості. Діаграми Ейлера - Вієна

Мета Сформувати практичні навички у студентів при виконання операцій над множинами

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН
опорний конспект, дидактичні матеріали

Час – 4 години

План проведення заняття

Структура заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: привітання, визначення присутності студентів на занятті
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10 хв	Включає в себе: вступне зауваження, мотивацію актуальності теми практичного заняття, формулювання мети
3 Основна частина	60 хв	Включає в себе: інструктаж з техніки безпеки на робочому місці; самостійне виконання студентами завдань; поточний контроль на тему «Множини»
4 Заклучна частина Домашнє завдання: [1], с.19-20 [2], с.13-19	5 хв	Включає в себе: підведення підсумків, узагальнення матеріалу, видача завдання для самостійної роботи; прибирання робочих місць

Література

1. Базилевич Л.Є. Дискретна математика у прикладах і задачах: підручник [Текст]/ Л.Є.Базилевич – Львів: Видавець І.Е. Чижигов, 2013. – 487 с.

2 Матвієнко М.П. Дискретна математика:начальний посібник [Текст] /М.П.Матвієнко – К. «Дискретна математика», 2014 – 348 с.

Навчальні матеріали практичного заняття

Операції над множинами:

1) *Об'єднанням* множин A та B називається множина, яка складається з усіх тих елементів, які належать хоча б одній з множин A чи B , тобто

$$A \cup B = \{x | (x \in A) \text{ або } (x \in B)\}$$

2) *Перетином* множин A та B називається множина, яка складається тільки з тих елементів, які належать і множині A і множині B , тобто

$$A \cap B = \{x | (x \in A) \text{ і } (x \in B)\}$$

3) *Різницею* множин A та B називається множина, яка складається тільки з тих елементів множини A , які не належать множині B , тобто

$$A \setminus B = \{x | (x \in A), (x \notin B)\}$$

4) *Доповненням* (до U) множини A називається множина, яка складається з усіх елементів, які не належать A , але які належать універсальній множині U , тобто

$$\bar{A} = U \setminus A$$

Приклад. Задані множини $A_1 = \{a, b, c\}$, $A_2 = \{c, d, e, f\}$, $U = \{a, b, c, d, e, f\}$. Виконати операції над множинами: а) об'єднання, б) перетин, в) різницю, г) доповнення.

Розв'язання

а) $A_1 \cup A_2 = \{a, b, c, d, e, f\}$

б) $A_1 \cap A_2 = \{c\}$

в) $A_1 \setminus A_2 = \{d, e, f\}$

г) $\bar{A}_1 = U \setminus A_1 = \{d, e, f\}$ і $\bar{A}_2 = U \setminus A_2 = \{a, b\}$

Приклад. Задані множини $A = \{1, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{2, 4\}$, $U = \{1, 2, 3, 4\}$. Виконати операції: а) $\bar{A} \cup \bar{B}$, б) $\overline{A \cap B}$, в) $A \cap \bar{B}$, г) $(B \setminus C) \cup A$

Розв'язання

а) $\bar{A} = U \setminus A = \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{1, 3\} = \{2, 4\}$,

$\bar{B} = U \setminus B = \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{2, 3, 4\} = \{1\}$,

$\bar{A} \cup \bar{B} = \{1, 2, 4\}$.

б) $A \cap B = \{3\}$

$\overline{A \cap B} = U \setminus (A \cap B) = \{1, 2, 4\}$,

в) $\bar{B} = \{1\}$

$A \cap \bar{B} = \{1\}$

г) $B \setminus C = \{3\}$

$(B \setminus C) \cup A = \{1, 3\}$

Приклад. Нехай універсальна множина U - множина усіх студентів і викладачів коледжу; A - множина усіх викладачів, B - множина студентів «відмінників», C - множина невстигаючих студентів, D - множина студентів 32 групи. Пояснити кожен із множин.

а) $\bar{A}$, б) $\bar{B}$, в) $B \cap D$, г) $D \setminus C$, д) $A \cup \bar{C}$, е) $A \cup (B \cap D)$, ж) $C \setminus D$

Розв'язання

а) $\bar{A}$ - множина усіх студентів коледжу (без викладачів)

б) $\bar{B}$ - множина викладачів і студентів, крім «відмінників»

в) $B \cap D$ - множина студентів «відмінників», які навчаються у 32 групі

г) $D \setminus C$ - множина студентів 32 групи, які справляються з навчальним планом

д) $A \cup \bar{C}$ - множина викладачів і усіх встигаючих студентів

е) $A \cup (B \cap D)$ - множина викладачів і усіх відмінників 32 групи

ж) $C \setminus D$ - множина невстигаючих студентів всіх груп коледжу, крім 32 групи

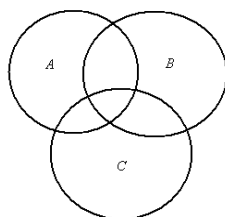
Завдання для аудиторної роботи

1 Знайти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, якщо:

№	A	B
01	{1,3,5}	{2,4}
02	{1,2,4}	{3,1,5,0}

03	$\{2,5,4\}$	$\{3,1,5\}$
04	$[-1,3]$	$]2,6[$
05	$(0,1)$	$\{0, \frac{1}{2}, 1\}$
06	$(3,5)$	$(2,4)$
07	$\{1,2,3,4\}$	$\{2,4,6,8\}$
08	$(0,9)$	$[-5,5]$
09	$\{1,3,\{2,4\},0\}$	$\{\{1,3\},2,4\}$
10	$\{1,\{2,5\},6\}$	$\{1.2.5.6\}$

2. На діаграмі Венна 3-х множин A, D, C указати точки, які належать множині R



№	R	№	R
01	$(A \cup B \cup C) \cap \bar{B}$	16	$(A \cap B) \cup C$
02	$(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$	17	$(A \cup B)/(A \cap C)$
03	$A \cap (B \cup C)$	18	$(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap C$
04	$A \cup (B \cap C)$	19	$(A \cap B)/C$
05	$((A/B) \cup (B/A)) \cap C$	20	$(A/C) \cap (B/C)$
06	$A \cap (B/C)$	21	$((A \cup B)/C) \cup (C/(A \cup B))$
07	$A \cup (B/C)$	22	$((A \cup B)/C) \cap \bar{A}$
08	$A/(B/C)$	23	$C/(A \cap B)$
09	$(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \bar{C})$	24	$C/(A \cup B)$
10	$(\bar{A} \cup \bar{B}) \cup C$	25	$(C/A) \cup (B/C)$

3. Задано вихідні множини: $A = \{1,2\}$, $B = \{3,4\}$, $C = \{4,5,6\}$, $D = \{a, d, c\}$, $H = \{a, c, b\}$, $Q = \{c, d, e\}$. Знайти:

№	Завдання	№	Завдання
01	$A \times B$	16	$C \times (B \times A)$
02	$B \times A$	17	$(C \times B) \times A$
03	$(A \times B) \times C$	18	$A \times B$
04	$A \times (B \times C)$	19	A^2
05	$A \times B \times C$	20	$B^0; C^1$

06	$(A \times B)^{-1}$	21	$(C \times (B \times A))^{-1}$
07	$(B \times A)^{-1}$	22	$((C \times B) \times A)^{-1}$
08	$((A \times B) \times C)^{-1}$	23	$(C \times B)^{-1}$
09	$(A \times (B \times C))^{-1}$	24	$D \times H$
10	$(A \times B \times C)^{-1}$	25	$H \times D$

Закріплення матеріалу

- Поточний контроль на тему «Множини»

Питання та завдання до контролю знань студентів

1 Для узагальнення та перевірки засвоєного матеріалу

Як виконується об'єднання множин?

Як виконується перетин множин?

Як виконується різниця множин?

Як виконується доповнення множин?

Практичне заняття

з навчальної дисципліни Дискретна математика

Тема Відношення та їх властивості

Мета Сформувати практичні навички студентів при визначенні властивостей бінарних відношень

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

Опорний конспект

Час – 4 години

План проведення заняття

Структура заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: привітання, визначення присутності студентів на занятті
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10 хв	Включає в себе: вступне зауваження, мотивацію актуальності теми практичного заняття, формулювання мети, контроль вихідного рівня знань студентів
3 Основна частина	60 хв	Включає в себе: інструктаж з техніки безпеки на робочому місці; самостійне виконання студентами завдань; поточний контроль на тему «Відношення»
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3], с.264-267	5 хв	Включає в себе: підведення підсумків, узагальнення матеріалу, видача завдання для самостійної роботи; прибирання робочих місць

Література

3 Нікольський Ю.В., Пасічник В.В. Дискретна математика: підручник [Текст]/ Ю.В.Нікольський, В.В. Пасічник – Львів: «Магнолія Плюс», 2005. – 608 с.

Навчальні матеріали практичного заняття

Наведемо властивості за якими класифікують відношення:

- 1 Рефлексивне відношення
- 2 Антирефлексивне (іррефлексивне) відношення
- 3 Симетричне відношення
- 4 Антисиметричне відношення
- 5 Транзитивне відношення

Приклади розв'язання типових задач

Приклад. Нехай $A = \{1,2,3,4,6,8,12\}$. Які впорядковані пари утворюють відношення $R = \{(a,b) | a \leq b\}$ і встановити його вид.

Розв'язання.

$R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,6), (1,8), (1,12), (2,3), (2,4), (2,6), (2,8), (2,12), (3,4), (3,6), (3,8), (3,12), (4,6), (4,8), (4,12), (6,8), (6,12), (8,12), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (6,6), (8,8), (12,12)\}$

воно рефлексивне, антисиметричне і транзитивне, тому воно частково впорядковане.

Приклад. Нехай $A = \{1,2,3,4\}$.

Які впорядковані пари утворюють відношення $R = \{(a,b) | a \text{ ділить } b\}$.

Розв'язання

$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)\}$

Приклад. Нехай $A = \{1,2,3,4\}$. Визначити вид кожного відношення

$R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\}$

$R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$

$R_3 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$

$R_4 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$

$R_5 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$

$R_6 = \{(3,4)\}$

Розв'язання.

Відношення R_3 і R_5 – рефлексивні, бо містять пари $(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)$;

Відношення R_2 і R_3 – симетричні, відношення R_4, R_5, R_6 – антисиметричні, відношення R_4, R_5, R_6 – транзитивні, відношення R_4, R_6 – іррефлексивні, відношення R_1, R_2 – не рефлексивні і не іррефлексивні.

Приклад. Знайти класи еквівалентності елементів 0 та 1 для відношення конгруентності за mod 4

Розв'язання.

Клас еквівалентності елемента $0 \cong b \pmod{4}$: $[0] = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\}$?

Клас еквівалентності елемента $1 \cong b \pmod{4}$: $[1] = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$

Приклад. Нехай $A = \{1,2,3,4,6,8,12\}$. Які впорядковані пари утворюють відношення $R = \{(a,b) | a \leq b\}$ і встановити його вид

Розв'язання.

$R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,6), (1,8), (1,12), (2,3), (2,4), (2,6), (2,8), (2,12), (3,4), (3,6), (3,8), (3,12), (4,6), (4,8), (4,12), (6,8), (6,12), (8,12), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (6,6), (8,8), (12,12)\}$

– воно рефлексивне, антисиметричне і транзитивне, тому воно частково впорядковане.

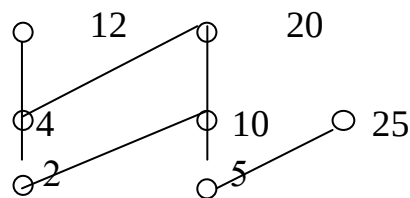
Приклад. На множині $A = \{2,4,5,10,12,20,25\}$

задано відношення часткового порядку

$R = \{(a, b) | a \text{ ділить } b\}$. Побудувати

діаграму Хассе.

Розв'язання.



$R = \{(2,4), (2,10), (2,12), (2,20), (4,12), (4,20), (5,10), (5,20), (5,25), (10,20)\}$

Завдання для аудиторної роботи

1. Перевірити, що наведені відношення рефлексивні.

Відношення $R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, c)\}$ на множині $A = \{a, b, c\}$.

Відношення паралельності на множині всіх прямих на площині.

2. Перевірити, що наведені відношення антирефлексивні.

Відношення $R = \{(a, b), (b, a), (c, a), (a, c), (b, c), (c, b)\}$ на множині $A = \{a, b, c\}$.

Відношення перпендикулярності на множині всіх прямих на площині.

3. Перевірити, що наведені відношення симетричні.

Відношення $R = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (a, c), (c, a)\}$ на множині $A = \{a, b, c\}$.

Відношення паралельності на множині всіх прямих на площині.

4. Перевірити, що наведені відношення антисиметричні.

Відношення $R = \{(a, d), (d, c), (a, c), (c, c)\}$ на множині $A = \{a, b, c\}$.

5. Перевірити, що наведені відношення транзитивні.

Відношення $R = \{(a, c), (c, b), (a, b), (a, a)\}$ на множині $A = \{a, b, c\}$.

Відношення паралельності на множині всіх прямих на площині.

6. Навести приклади відношень:

- (a) рефлексивного, симетричного, але не транзитивного;
- (b) симетричного, транзитивного, але не рефлексивного;
- (c) рефлексивного і транзитивного, але не симетричного.

7. Показати, що наведені відношення є відношенням еквівалентності і побудувати для них розбиття на класи еквівалентності.

(a) Відношення U_A і I_A для довільної множини A .

(b) Нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ $(a, b) \in R$, якщо числа a і b мають однакову кількість натуральних дільників.

Закріплення матеріалу

- Поточний контроль на тему «Відношення»

Питання та завдання до контролю знань студентів

1 Для узагальнення та перевірки засвоєного матеріалу

Що таке відношення? Способи задання відношень.

Які властивості можна визначити у відношень?

Як будується діаграма Хассе?

Практичне заняття

з навчальної дисципліни Дискретна математика

Тема Операції над відношеннями. Композиція відношень.

Метазаняття Сформувати практичні навички при виконанні операцій над відношеннями: перетин, об'єднання, різниця, композиція відношень

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

Опорний конспект

Час – 2 години

План проведення заняття

Структура заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: привітання, визначення присутності студентів на занятті
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10 хв	Включає в себе: вступне зауваження, мотивацію актуальності теми практичного заняття, формулювання мети, контроль вихідного рівня знань студентів
3 Основна частина	60 хв	Включає в себе: інструктаж з техніки безпеки на робочому місці; самостійне виконання студентами завдань; поточний контроль на тему «Операції над відношеннями»
4 Заключна частина Домашнє завдання: [2], с.37-39	5 хв	Включає в себе: підведення підсумків, узагальнення матеріалу, видача завдання для самостійної роботи; прибирання робочих місць

Література

2 Матвієнко М.П. Дискретна математика: начальний посібник [Текст] /М.П.Матвієнко – К. «Дискретна математика», 2014 – 348 с.

Навчальні матеріали практичного заняття

1) Об'єднанням відношень A та B називається відношення, яка складається з усіх тих пар елементів, які належать хоча б одному з відношень A чи B , тобто

$$R(A \cup B) = \{(a, b) | (a, b) \in A \text{ або } (a, b) \in B\}$$

2) Перетином відношень A та B називається відношення, яка складається тільки з тих пар елементів, які належать і відношенню A і відношенню B , тобто

$$R(A \cap B) = \{(a, b) | ((a, b) \in A) \text{ і } (a, b) \in B)\}$$

3) Різницею відношень A та B називається відношення, яке складається тільки з тих пар елементів відношення A , які не належать відношенню B , тобто

$$R(A \setminus B) = \{(a, b) | ((a, b) \in A), ((a, b) \notin B)\}$$

4) Композицією відношень R та S називається відношення, яке складається із всіх можливих упорядкованих пар (a, c) , де $a \in A, c \in C$ і для яких існує елемент $b \in B$ такий, що $(a, b) \in R, (b, c) \in S$ і позначається $R \circ S$.

Приклад. Нехай $A = \{1, 2, 3\}$ і $B = \{a, b\}$. Тоді, $R = \{(1, a), (1, b), (3, a)\}$ є відношення A в B . Обернене відношення $R^{-1} = \{(a, 1), (b, 1), (a, 3)\}$.

Приклад. Нехай $R = \{(x, y) : (x, y \in N) (2x + y = 10)\}$ - бінарне відношення.

Перепишемо $R = \{(1, 8), (2, 6), (3, 4), (4, 2)\}$. Тоді обернене відношення $R^{-1} = \{(8, 1), (6, 2), (4, 3), (2, 4)\}$.

Приклад. Нехай $A = \{1, 2, 3\}$ та $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Визначимо операції над відношеннями $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ і $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$ з A в B :

$$R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3)\};$$

$$R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\};$$

$$R_1 \setminus R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\};$$

$$R_2 \setminus R_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}.$$

Приклад. Знайти композицію відношень R та S , де R відношення із множини $A = \{1, 2, 3\}$ в множину $B = \{1, 2, 3, 4\}$: $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$;

S - відношення із множини B в множину $C = \{0, 1, 2\}$: $S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$.

Композицію $S \circ R$ будують, використовуючи всі впорядковані з R та з S такі, що другий елемент пари з R збігається з першим елементом пари з S . Тоді отримаємо

$$S \circ R = \{(1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1)\}.$$

Приклад. Знайти композицію відношень $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$ і $S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$.

Розв'язання.

$$R \circ S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}.$$

Приклад. Якщо відношення R - «бути сином», тоді відношення $R \circ R$ - «бути онуком».

Приклад. Нехай на множині $A = \{1, 2, 3\}$ задано відношення $R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$. Знайдемо $R^n, n = 2, 3, 4, 5$. За означенням послідовно отримаємо

$$R^2 = R \circ R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 2)\};$$

$$R^3 = R^2 \circ R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\};$$

$$R^4 = R^3 \circ R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\};$$

$$R^5 = R^4 \circ R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}.$$

Приклад. На множині $A = \{1, 2, 3, 4\}$ задано відношення

$$R = \{(2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4)\}.$$

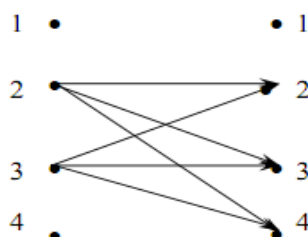
Побудувати:

- матрицю та графік відношення R ;
- відношення $R^2 \cap R^{-1}$;
- переріз відношення R за елементом 2.

Розв'язання

а) Матриця відношення матиме вигляд
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Схематичне зображення відношення R є



б) Знайдемо відношення $R^2 = R \circ R$.

Оскільки $R^2 = \{(2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4)\}$, то $R^2 = R$.

Знайдемо відношення R^{-1} :

$$R^{-1} = \{(2,2), (3,2), (4,2), (2,3), (3,3), (4,3)\},$$

тому

$$R^2 \cap R^{-1} = \{(2,2), (3,2), (2,3), (3,3)\}.$$

в) $R(2) = \{2,3,4\}$.

Завдання для аудиторної роботи

1. Нехай $E = \{(p, q) \in P: p \text{ є ворогом } q\}$ і $F = \{(p, q) \in P: p \text{ є другом } q\}$, де P є множина всіх людей. Виразити в термінах бінарних відношень «ворог мого ворога є мій друг».

2. Нехай $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$,

$$R(A, B) = \{(1, 4), (1, 5), (2, 5), (3, 6)\}, \quad S(B, B) = \{(4, 5), (4, 6), (5, 4), (6, 6)\}.$$

Знайти:

а) $S \circ R$;	б) $S \circ S$;	в) $S^{-1} \circ R$;	г) $R^{-1} \circ S$.
------------------	------------------	-----------------------	-----------------------

3. Знайдіть $Dom(R)$, $Im(R)$, $\overline{R}$, R^{-1} для наступних бінарних відношень

а) $R = \{(x, y) | x, y \in \{1, 2, 3, 4\}, x \geq y\}$

б) $R = \{(x, y) | x \in [0; 3], y \in [-1, 2], x^2 + 4y^2 \leq 4\}$;

в) $R = \{(x, y) | x \in [0; 1], y \in [0; 4], x^3 = y\}$;

г) $R = \{(a, b) | a, b \in P(M), a \subseteq b\}$, где $M = \{x, y\}$.

4. Для відношення $R = \{(x, y) | x, y \in M, x \geq y\}, M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$:
- а) побудуйте матрицю відношення;
 - б) знайдіть область визначення $\text{Dom}(R)$;
 - в) знайдіть область значень $\text{Im}(R)$;
 - г) знайдіть образи $R(2)$ і $R(5)$ елементів відносно даного відношення;
 - д) знайдіть прообрази елементів $R^{-1}(2)$ і $R^{-1}(5)$;
 - е) задайте доповнення $\bar{R}$ та обернене відношення R^{-1} .

Питання та завдання до контролю знань студентів

1 Для узагальнення та перевірки засвоєного матеріалу

- Як визначається операція об'єднання відношень?
- Як визначається операція перетину відношень?
- Як визначається операція різниці відношень?
- Як визначається операція композиція відношень?

Практичне заняття

з навчальної дисципліни Дискретна математика

Тема **Зображення булевих функцій формулами**

Начитись виконувати операції над булевими функціями та зображати їх

Мета таблично

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

Опорний конспект

Час – 2 години

План проведення заняття

Структура заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: привітання, визначення присутності студентів на занятті
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10 хв	Включає в себе: вступне зауваження, мотивацію актуальності теми практичного заняття, формулювання мети, контроль вихідного рівня знань студентів
3 Основна частина	60 хв	Включає в себе: інструктаж з техніки безпеки на робочому місці; самостійне виконання студентами завдань; поточний контроль на тему «Булева функція»
4 Заключна частина Домашнє завдання: [2], с.37-39	5 хв	Включає в себе: підведення підсумків, узагальнення матеріалу, видача завдання для самостійної роботи; прибирання робочих місць

Література

2 Матвієнко М.П. Дискретна математика:навчальний посібник [Текст] /М.П.Матвієнко – К. «Дискретна математика», 2014 – 348 с.

Приклади розв'язування задач

1. Побудувати таблицю булевої функції, заданої формулою $\bar{x} \rightarrow (\bar{z} \sim (y \oplus xz))$.

x	y	z	$\bar{x}$	$\bar{z}$	xz	$y \oplus xz$	$\bar{z} \sim (y \oplus xz)$	$\bar{x} \rightarrow (\bar{z} \sim (y \oplus xz))$
0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1

1	0	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1	0	1	1

Завдання для аудиторної роботи

1. Побудувати таблиці булевих функцій, заданих формулами:

а) $(x \rightarrow y) \oplus ((y \rightarrow z) \oplus (z \rightarrow x))$

б) $\overline{(\bar{x} \vee y) \vee xz} \downarrow (x \sim y)$

в) $((x|y) \downarrow z)|y) \downarrow z$

г) $(x_1|x_2x_3) \downarrow ((x_2 \sim x_3) \rightarrow x_1)$

д) $\overline{(x_1 \oplus x_3)} \oplus (x_1 \sim (x_3|x_1x_2))$

е) $(x_1 \oplus \bar{x}_2) \vee \overline{(x_1x_3 \rightarrow (x_2 \oplus x_3))}$

є) $(x_1 \rightarrow x_2\bar{x}_3) \oplus \overline{(x_2 \downarrow x_3)} \vee (x_3 \sim x_2)$

2. Побудувати формулу, яка реалізує функцію, двоїсту до f :

а) $f = xy \vee yz \vee xt \vee zt$

б) $f = x1 \vee y(zt \vee 0) \vee \bar{x}yt$

в) $f = (\bar{x} \vee y) \oplus ((x \downarrow y)|(\bar{x} \sim yz))$

3. Використовуючи тотожність перетворення, довести тотожність формул F та G :

а) $F = \bar{x}\bar{z} \vee xy \vee \bar{x}\bar{z}, G = xyz \vee \bar{z}$;

б) $F = (z \rightarrow y) \rightarrow (x\bar{y} \oplus (x \sim \bar{y})), G = (x \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y})$;

в) $F = xy \oplus xz \oplus yz, G = xy\bar{z} \vee xz \vee yz$

Питання та завдання до контролю знань студентів

1 Для узагальнення та перевірки засвоєного матеріалу на лекції

Що називається булевою функцією?

Які змінні називаються істотними, які фіктивними?

Які елементарні булеві функції ви знаєте?

Які функції називаються рівними?

Що таке формула?

Пріоритет операцій в формулах.

Практичне заняття

з навчальної дисципліни Дискретна математика

Тема Агебра Буля та алгебра Жегалкіна.

Навчитись застосовувати основні закони алгебр булевих функцій

Мета при розв'язування задач.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

Опорний конспект

Час – _4_ години

План проведення заняття

Структура заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: привітання, визначення присутності студентів на занятті
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10 хв	Включає в себе: вступне зауваження, мотивацію актуальності теми практичного заняття, формулювання мети, контроль вихідного рівня знань студентів
3 Основна частина	60 хв	Включає в себе: інструктаж з техніки безпеки на робочому місці; самостійне виконання студентами завдань; поточний контроль на тему «Булева функція»
4 Заключна частина Домашнє завдання: [2], с.140-143	5 хв	Включає в себе: підведення підсумків, узагальнення матеріалу, видача завдання для самостійної роботи; прибирання робочих місць

Література

2 Матвієнко М.П. Дискретна математика:начальний посібник [Текст] /М.П.Матвієнко – К. «Дискретна математика», 2014 – 348 с.

Приклади розв'язування задач

Приклад. Перетворити формулу $\overline{xy \vee z}$ у рівносильну формулу алгебри Жегалкіна.

$$\overline{xy \vee z} = (xy \vee (x \oplus y)) \oplus 1 = (xy \oplus (z \oplus 1) \oplus xy(z \oplus 1)) \oplus 1 = xy \oplus z \oplus 1xyz \oplus xy1 = xyz \oplus z.$$

Завдання для аудиторної роботи

1. Обчисліть значення функції $f(x, y, z)$ на наборах $(0,1,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$.

$$\text{a) } f(x, y, z) = (x \sim y) \oplus (xz \vee y);$$

$$\text{б) } f(x, y, z) = (\bar{x} \oplus z)y \rightarrow (x \vee y);$$

$$\text{в) } f(x, y, z) = (x \rightarrow y) \sim (\bar{x} \rightarrow \bar{y})z.$$

2. Побудуйте таблиці істинності наступних функцій:

$$\text{a) } f(x, y) = xy \oplus \bar{x};$$

$$\text{б) } f(x, y) = (xy \oplus \bar{y}) \vee (\bar{x} \rightarrow y);$$

$$\text{в) } f(x, y, z) = (x \rightarrow y) \vee (x \rightarrow zy);$$

$$\text{г) } f(x, y, z) = \overline{xyz} \oplus (\bar{x} \rightarrow \bar{zy});$$

$$\text{д) } f(x, y, z, t) = (\bar{x} \rightarrow (y \oplus z))(\bar{y} \rightarrow xt)(t \rightarrow (z \oplus y))(x \oplus z) \rightarrow x;$$

$$\text{е) } f(x, y, z, t) = \overline{((x \oplus y)(z \oplus t) \rightarrow xyz t)}.$$

1. Побудуйте рівносильну формулу в алгебрі Буля.

$$\text{a) } (x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus (xy \oplus 1)$$

$$\text{б) } x \oplus xy \oplus xyz$$

$$\text{в) } (x \oplus y)(x \oplus z)$$

2. Побудуйте рівносильну формулу в алгебрі Жегалкіна.

$$\text{a) } xy \vee x\bar{z}$$

$$\text{б) } (x \vee y)(\bar{x} \vee z)$$

$$\text{в) } (\bar{x} \vee \bar{z})(x \vee \bar{y}) \vee xyz$$

Закріплення матеріалу

- Поточний контроль на тему «Булева функція»

Практичне заняття

з навчальної дисципліни Дискретна математика

Тема Побудова полінома Жегалкіна

Розглянути методи побудови полінома Жегалкіна та навчитись його

Мета будувати.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

Опорний конспект

Час – _4_ години

План проведення заняття

Структура заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: привітання, визначення присутності студентів на занятті
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10 хв	Включає в себе: вступне зауваження, мотивацію актуальності теми практичного заняття, формулювання мети, контроль вихідного рівня знань студентів
3 Основна частина	60 хв	Включає в себе: інструктаж з техніки безпеки на робочому місці; самостійне виконання студентами завдань; поточний контроль на тему «Булева функція»
4 Заключна частина Домашнє завдання: [2], с.109-114	5 хв	Включає в себе: підведення підсумків, узагальнення матеріалу, видача завдання для самостійної роботи; прибирання робочих місць

Література

2 Матвієнко М.П. Дискретна математика:начальний посібник [Текст] /М.П.Матвієнко – К. «Дискретна математика», 2014 – 348 с.

Навчальні матеріали

Приклади розв'язування завдань

Приклад. Побудувати поліном Жегалкіна за досконалою ДНФ для функції $f(x, y, z) = xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee xz$.

Спочатку перетворимо ДНФ у досконалу, використовуючи розщеплення кон'юнкцій:

$$\begin{aligned} xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee xz &= xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x(y \vee \bar{y})z = xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee xyz \vee x\bar{y}z = \\ &= xy\bar{z} \oplus \bar{x}yz \oplus xyz \oplus x\bar{y}z. \end{aligned}$$

Позбавимося від заперечень:

$$P(x, y, z) = xy(1 \oplus z) \oplus (1 \oplus x)yz \oplus xyz \oplus x(1 \oplus y)z = \\ = xy \oplus xyz \oplus yz \oplus xyz \oplus xyz \oplus xz \oplus xyz = xy \oplus yz \oplus xz.$$

Приклад. Побудувати поліном Жегалкіна для функції $f(x, y, z) = (10101011)$ методом невизначених коефіцієнтів.

Загальний вигляд полінома від трьох змінних з невизначеними коефіцієнтами такий:

$$P(x, y, z) = c_0 \oplus c_1 z \oplus c_2 y \oplus c_3 x \oplus c_4 yz \oplus c_5 xz \oplus c_6 xy \oplus c_7 xyz.$$

Тоді

$$\begin{aligned} f(0,0,0) &= 1 = c_0 \\ f(0,0,1) &= 0 = c_1 \oplus c_0 \\ f(0,1,0) &= 1 = c_2 \oplus c_0 \\ f(0,1,1) &= 0 = c_4 \oplus c_2 \oplus c_1 \oplus c_0 \\ f(1,0,0) &= 1 = c_3 \oplus c_0 \\ f(1,0,1) &= 0 = c_5 \oplus c_3 \oplus c_1 \oplus c_0 \\ f(1,1,0) &= 1 = c_6 \oplus c_3 \oplus c_2 \oplus c_0 \\ f(1,1,1) &= 1 = c_7 \oplus c_6 \oplus c_5 \oplus c_4 \oplus c_3 \oplus c_2 \oplus c_1 \oplus c_0 \end{aligned}$$

Звідси отримуємо $c_0 = c_1 = c_7 = 1$ та $c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0$. Отже, шуканий поліном Жегалкіна $xyz \oplus z \oplus 1$.

Приклад. Побудувати поліном Жегалкіна для функції $f(x, y) = x \sim y$ методом невизначених коефіцієнтів.

Загальний вигляд полінома від двох змінних з невизначеними коефіцієнтами такий:

$$P(x, y) = c_0 \oplus c_1 x \oplus c_2 y \oplus c_3 xy.$$

Прирівнюємо значення функції і полінома на всіх чотирьох наборах значень змінних і одержимо систему рівнянь відносно невизначених коефіцієнтів

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 1 = c_0, \\ f(0,1) &= 1 = c_0 \oplus c_2, \\ f(1,0) &= 1 = c_0 \oplus c_1, \\ f(1,1) &= 1 = c_0 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_3. \end{aligned}$$

Звідси визначаємо $c_0 = 1, c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 0$. Отже, $x \sim y = 1 \oplus x \oplus y$.

Приклад. Дослідити на лінійність функцію $f(x, y, z) = (xy) \rightarrow \bar{z}$

Побудуємо поліном Жегалкіна функції $f(x, y, z)$ використовуючи такі тотожності: $x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$, $x \vee y = x \oplus y \oplus xy$, $x = \bar{x} \oplus 1$

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x \vee y) \rightarrow \bar{z} = (\overline{x \vee y}) \vee \bar{z} = (\overline{x \vee y}) \oplus \bar{z} \oplus (\overline{x \vee y})\bar{z} = \\ &= (x \oplus y \oplus xy \oplus 1) \oplus (z \oplus 1) \oplus (x \oplus y \oplus xy \oplus 1)(z \oplus 1) = \\ &= x \oplus y \oplus xy \oplus 1 \oplus z \oplus 1 \oplus xz \oplus yz \oplus xyz \oplus z \oplus x \oplus y \oplus xy \oplus 1 = \\ &= xyz \oplus xz \oplus yz \oplus 1. \end{aligned}$$

Отже, функція $f(x, y, z) = (xy) \rightarrow \bar{z}$ не є лінійною, оскільки її поліном Жегалкіна містить кон'юнкції змінних.

Завдання для аудиторної роботи

1. Зобразіть поліном Жегалкіна функцію:

а) $f_1 = \bar{x}$;

г) $f_4 = x \oplus y$;

б) $f_2 = x \cdot y$;

д) $f_5 = x \sim y$;

в) $f_3 = x \vee y$;

е) $f_6 = x \rightarrow y$.

2. Побудувати поліном Жегалкіна для функцій на основі тотожних перетворень:

а) $f(\tilde{x}^2)$

б) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 | x_2) \downarrow x_3$

в) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \rightarrow x_2)(x_2 \downarrow x_3)$

3. Побудувати поліном Жегалкіна для функцій методом невизначених коефіцієнтів:

а) $f(\tilde{x}^2) = (0111)$ б) $f(\tilde{x}^3) = (01010010)$ в) $f(\tilde{x}^4) = (1110111110111111)$

4. Побудувати поліном Жегалкіна за ДДНФ для функцій:

а) $f(\tilde{x}^2) = (1101)$ б) $f(\tilde{x}^3) = (01010111)$ в) $f(\tilde{x}^4) = (1010111010111011)$

5. Знайдіть поліном Жегалкіна для функції:

а) $f(x, y) = (1000)^T$;

б) $f(x, y, z) = (01101000)^T$;

в) $f(x, y, z) = \bar{x} \vee xy \vee x\bar{z}$;

г) $f(x, y, z) = (x \sim yz) \rightarrow y$.

6. Дослідити на лінійність функції:

а) $f(\tilde{x}^2) = x_1 x_2 (x_1 \oplus x_2)$

б) $f(\tilde{x}^2) = (x_1 \rightarrow x_2)(x_2 \rightarrow x_1) \sim x_2$

в) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2) \oplus x_3$

г) $f(\tilde{x}^2) = (1011)$

д) $f(\tilde{x}^3) = (10101001)$

е) $f(\tilde{x}^4) = (0110110000101011)$

Практичне заняття

з навчальної дисципліни Дискретна математика

Тема Матриці суміжності та інцидентності для неорієнтованого графа

Мета Сформувати практичні навички у будові матриці суміжності і матриці інцидентності для неорієнтованих графів

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

Опорний конспект, дидактичні матеріали

Час – 2 години

План проведення заняття

Структура заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: привітання, визначення присутності студентів на занятті
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10 хв	Включає в себе: вступне зауваження, мотивацію актуальності теми практичного заняття, формулювання мети, контроль вихідного рівня знань студентів
3 Основна частина	60 хв	Включає в себе: інструктаж з техніки безпеки на робочому місці; самостійне виконання студентами завдань
4 Заключна частина Домашнє завдання: [4], с.133-138	5 хв	Включає в себе: підведення підсумків, узагальнення матеріалу, видача завдання для самостійної роботи; прибирання робочих місць

Література

4 Трохимчук, Р.М. Дискретна математика: підручник [Текст] / Р.М. Трохимчук, - Київ: ДП «Персонал», 2010. – 525 с.

Навчальні матеріали практичного заняття

Матриця інцидентності:

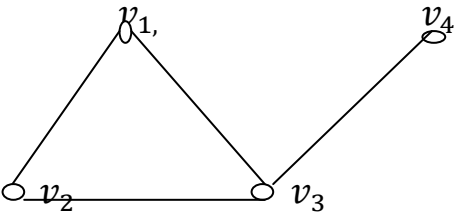
Неорієнтований граф
$M = \{m_{ij}\}, \quad i, j = \overline{n, m}$ $m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } v_i \text{ і } e_j \text{ інцидентні} \\ 0, & \text{якщо } v_i \text{ і } e_j \text{ неінцидентні} \end{cases}$

Матриця суміжності:

Неорієнтований граф	
$B = \{b_{ij}\}, \quad i, j = \overline{n, m}$	
$b_{ij} = \begin{cases} k, \text{ кількість ребер, які сполучають вершини } v_i \\ 0, \text{ якщо вершини } v_i \text{ не сполучаються ребрами} \end{cases}$	

Приклади розв’язання типових задач

Приклад. Задати зображений неорієнтований граф множиною вершин і ребер.

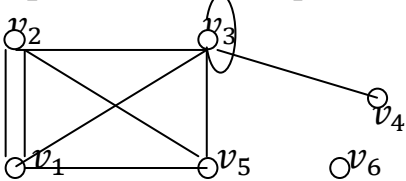


Розв’язання.

Множина вершин $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

Множина ребер $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_4)\}$

Приклад. Для неорієнтованого графа визначити степінь вершин

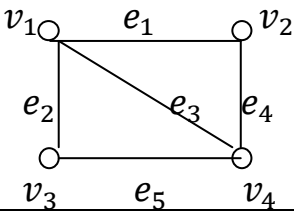


Розв’язання .

$\deg(v_1) = 4, \deg(v_2) = 4, \deg(v_3) = 6,$

$\deg(v_4) = 1, \deg(v_5) = 3, \deg(v_6) = 0$

Приклад. Для неорієнтованого графа побудувати матрицю інцидентності і матрицю суміжності



Матриця інцидентності

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
v_1	1	1	1	0	0
v_2	1	0	0	1	0
v_3	0	1	0	0	1
v_4	0	0	1	1	1

Матриця суміжності

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	1	1	1
v_2	1	0	0	1
v_3	1	0	0	1
v_4	1	1	1	0

Завдання для аудиторної роботи

4.1.13. За даною матрицею суміжності побудувати її граф:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} & \begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 \\ x_1 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ x_2 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} & \text{b)} & \begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ x_1 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ x_2 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ x_3 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ x_4 & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} & \text{c)} & \begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ x_1 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ x_2 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ x_3 & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ x_4 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ x_5 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}
 \end{array}$$

4.1.14. За даною матрицею інцидентності побудувати її граф:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} & \begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 \\ x_1 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ x_2 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} & \text{b)} & \begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ x_1 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ x_2 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ x_3 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ x_4 & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} & \text{c)} & \begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ x_1 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ x_2 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ x_3 & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ x_4 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ x_5 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}
 \end{array}$$

4.1.15. Для матриці суміжності із задачі № 13 побудувати її матрицю інцидентності.

4.1.16. Для матриці інцидентності із задачі № 14 побудувати її матрицю суміжності.

4.1.17. Побудувати два ізоморфних графа, що містять.

- 3 вершини і 4 ребра;
- 4 вершини і 3 паралельних ребра;
- 5 вершин і 3 петлі.

Питання та завдання до контролю знань студентів

1 Для узагальнення та перевірки засвоєного матеріалу

Як будується матриця інцидентності для неорієнтованого графа?

Як будується матриця суміжності для неорієнтованого графа?

Практичне заняття

з навчальної дисципліни Дискретна математика

Тема Матриці суміжності і матриці інцидентності орієнтованого графа

Мета Сформувати практичні навички у будові матриці суміжності і матриці інцидентності для орієнтованих графів

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

Опорний конспект, дидактичні матеріали

Час – 2 години

План проведення заняття

Структура заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: привітання, визначення присутності студентів на занятті
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10 хв	Включає в себе: вступне зауваження, мотивацію актуальності теми практичного заняття, формулювання мети, контроль вихідного рівня знань студентів
3 Основна частина	60 хв	Включає в себе: інструктаж з техніки безпеки на робочому місці; самостійне виконання студентами завдань; поточний контроль на тему «Графи»
4 Заключна частина Домашнє завдання: [4], с.133-138	5 хв	Включає в себе: підведення підсумків, узагальнення матеріалу, видача завдання для самостійної роботи; прибирання робочих місць

Література

4 Трохимчук, Р.М. Дискретна математика: підручник [Текст] / Р.М. Трохимчук, - Київ: ДП «Персонал», 2010. – 525 с.

Навчальні матеріали практичного заняття

Матриця інцидентності:

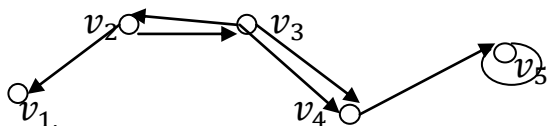
Орієнтований граф	
$M = \{m_{ij}\}, \quad i, j = \overline{n, m}$	
$m_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо вершина } v_i \text{ початок ребра } e_j \\ -1, \text{ якщо вершина } v_i \text{ кінець ребра } e_j \\ 2, \text{ якщо ребро } e_j \text{ — це петля у вершині } v_i \\ 0, \text{ якщо } v_i \text{ і } e_j \text{ неінцидентні} \end{cases}$	

Матриця суміжності:

Орієнтований граф	
$B = \{b_{ij}\}, \quad i, j = \overline{n, m}$	
$b_{ij} = \begin{cases} k, \text{ кількість ребер, які виходять з вершини } v_i \\ 0, \text{ якщо вершини } v_i \text{ не сполучаються ребрами} \end{cases}$	

Приклади розв'язання типових задач

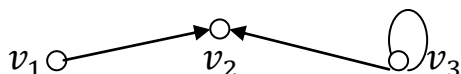
Приклад. Задати зображений орієнтований граф множиною вершин і ребер



Множина вершин $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

Множина ребер $E = \{(v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_3, v_2), (v_3, v_4), (v_4, v_3), (v_4, v_5), (v_5, v_5)\}$

Приклад. Для орієнтованого графа визначити степінь вершин



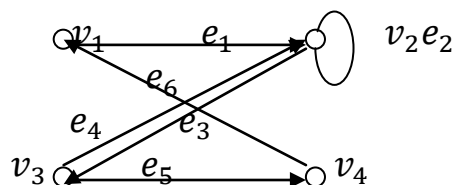
Півстепенем входу вершини називається кількість дуг, які мають цю вершину кінцевою:

$$\deg^-(v_1) = 0, \deg^-(v_3) = 1, \deg^-(v_2) = 2$$

Півстепенем виходу вершини називається кількість дуг, для яких ця вершина початкова:

$$\deg^+(v_2) = 0, \deg^+(v_1) = 1, \deg^+(v_3) = 2$$

Приклад. Для орієнтованого графа побудувати матрицю інцидентності і матрицю суміжності



Матриця інцидентності							Матриця суміжності				
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6		v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	1	0	0	0	0	-1	v_1	0	1	0	0
v_2	-1	2	1	-1	0	0	v_2	0	1	1	0
v_3	0	0	-1	1	1	0	v_3	0	1	0	1
v_4	0	0	0	0	-1	1	v_4	1	0	0	0

Завдання для аудиторної роботи

Орієнтований граф $G(X, U)$ заданий аналітично:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\};$$

$$U = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_4, x_3)(x_5, x_4), (x_2, x_5), (x_2, x_3), (x_3, x_5)\}.$$

Задати його геометричним та матричним способами.

№	Завдання
1	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ $U = \{(x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_2, x_6)(x_3, x_2), (x_4, x_3), (x_4, x_5), (x_5, x_3), (x_5, x_6), (x_6, x_1), (x_6, x_4)\}$
2	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ $U = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_4)(x_3, x_2), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_5, x_2), (x_5, x_3), (x_5, x_6), (x_6, x_4)\}$
3	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ $U = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_5)(x_2, x_6), (x_3, x_4), (x_4, x_1), (x_4, x_5), (x_4, x_6)\}$
4	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ $U = \{(x_1, x_2), (x_1, x_5), (x_2, x_5)(x_3, x_2), (x_3, x_4), (x_3, x_5), (x_4, x_2), (x_4, x_5), (x_4, x_7), (x_6, x_1), (x_6, x_5)(x_6, x_7)\}$
5	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ $U = \{(x_1, x_4), (x_1, x_5), (x_2, x_1)(x_2, x_3), (x_3, x_5), (x_4, x_2), (x_5, x_6), (x_6, x_3)\}.$
6	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ $U = \{(x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_3, x_2)(x_3, x_4), (x_3, x_6), (x_5, x_4), (x_5, x_6), (x_7, x_4), (x_7, x_6)\}.$

Питання та завдання до контролю знань студентів

1 Для узагальнення та перевірки засвоєного матеріалу

Як будується матриця інцидентності для орієнтованого графа?

Як будується матриця суміжності для орієнтованого графа?

Практичне заняття

з навчальної дисципліни Дискретна математика

Тема Операції над графами.

Мета заняття Розглянути можливі операції над графами та їх властивості.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

Опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: привітання, визначення присутності студентів на занятті
2. Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.
4 Заключна частина Домашнє завдання: [2], с.220-227	5 хв	Включає в себе: узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу

Література

2 Матвієнко М.П. Дискретна математика:навчальний посібник [Текст] /М.П.Матвієнко – К. «Дискретна математика», 2014 – 348 с.

Навчальні матеріали

Операція об'єднання графів

Граф F називають об'єднанням графів $G = (V, E)$ і $H = (V_1, E_1)$, якщо

$$F = G \cup H = (V \cup V_1, E \cup E_1).$$

Якщо $V \cap V_1 = \emptyset$ та $E \cap E_1 = \emptyset$, то об'єднання графів називають диз'юнктивним. З властивостей операції об'єднання випливає, що $G \cup H = H \cup G$.

Граф є зв'язним, якщо його не можна представити у вигляді диз'юнктивного об'єднання двох графів і незв'язним – у протилежному випадку. На рис. 3.54 показано об'єднання двох графів.

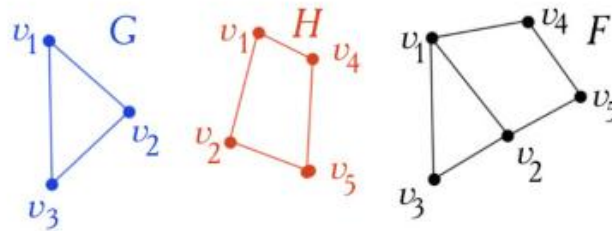


Рис. 3.54. Графи G і H та їх об'єднання F

Операція перетину графів

Граф F називають перетином графів

$G = (V, E)$ і $H = (V_1, E_1)$, якщо $F = G \cap H = (V \cap V_1, E \cap E_1)$.

Операція доповнення

Доповненням графа $G = (V, E)$ називають граф $\bar{G} = (V, \bar{E})$, множиною вершин якого є множина V , а множина ребер формується відповідно до правила $\bar{E} = \{e \in V \times V \mid e \notin E\}$.

Декартовий добуток графів

Визначення. Декартовим добутком графів $G_1 = (V_1, E_1)$

і $G_2 = (W_2, E_2)$ називають граф $G(\Omega, E)$, множиною вершин якого

є декартовий добуток $\Omega = V_1 \times W_2$, де $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $W_2 = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$.

$$\Omega = \{(v_1, w_1), (v_1, w_2), \dots, (v_n, w_m)\}.$$

Причому вершина (v_i, w_j) суміжна з вершиною (v_a, w_b) при

$1 \leq i, a \leq n$, $1 \leq j, b \leq m$ тоді й тільки тоді, коли в графі G_1 суміжні відповідні

вершини v_i і v_a , а в графі G_2 суміжні вершини w_j і w_b .

Приклад 3.21. Розглянемо два графа:

$G_1 = (V_1, E_1)$, де $V_1 = \{v_1, v_2\}$ й $E_1 = \{(v_1, v_2)\}$.

$G_2 = (W_2, E_2)$, де $W_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ й $E_2 = \{(w_1, w_2), (w_2, w_3)\}$.

Побудувати декартовий добуток даних графів $G = G_1 \times G_2$. $G = (\Omega, E)$

Розв'язок.

Графічне представлення графів G_1 , G_2 та їхнього декартового добутку G показано на рис. 3.55.

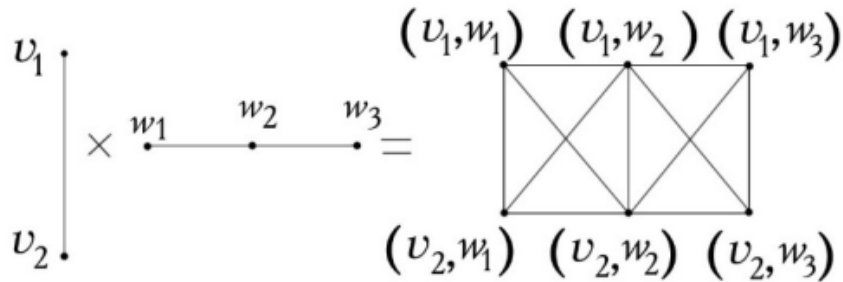


Рис. 3.55. Графи G_1 , G_2 і G

$$\Omega = \{(v_1, w_1), (v_1, w_2), (v_1, w_3), (v_2, w_1), (v_2, w_2), (v_2, w_3)\}$$

$$E = \{((v_1, w_1), (v_2, w_1)), ((v_1, w_1), (v_1, w_2)), \dots\}$$

$$|V_1| = 2; |W_2| = 3 \Rightarrow \text{матриця вершин має 2 рядки і 3 стовпці}$$

Питання та завдання до контролю знань студентів

- Для узагальнення та перевірки засвоєного матеріалу на лекції
Дати означення графа, вказати способи його задання.
Які теоретико-множинні операції можна застосовувати до графів?.

Практичне заняття

з навчальної дисципліни Дискретна математика

Тема Код Фано.

Мета заняття Сформулювати уявлення про принципи і методiku оптимального кодування

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

Опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2. Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	60 хв	Головне місце приділяється викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень. <i>Поточний контроль на тему «Кодування»</i>
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3], с.302-308	5 хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу</i>

Література

3 Нікольський Ю.В., Пасічник В.В. Дискретна математика: підручник [Текст]/ Ю.В.Нікольський, В.В. Пасічник – Львів: «Магнолія Плюс», 2005. – 608 с.

Навчальні матеріали

Проста ідея побудови коду належить американському математику Фано.

Нехай заданий алфавіт $A = \{a_1, \dots, a_r\}$ і розподіл ймовірностей $P = (p_1, \dots, p_r)$ появи букв у повідомленні. Тут p_i ймовірність появи букви a_i , $p_1 + p_2 + \dots + p_r = 1$.

Сформулюємо алгоритм за методом Фано.

1. Упорядкуємо букви алфавіту A за спаданням ймовірностей їхньої появи в повідомленні

2. Розбиваємо множину букв, записаних у вказаному порядку, на дві послідовні частини так, щоб сумарні ймовірності кожної з них були якомога ближчі одна до одної. Кожній букві з першої частини припустимо символ 0, другої - символ 1. Далі так само чинять із кожною частиною, якщо вона містить принаймні дві букви. Процедuru продовжуємо доти, доки вся множина не буде розбита на окремі букви.

Для кожної роздільної схеми алфавітного кодування σ математичне сподівання коефіцієнта збільшення довжини повідомлення в разі кодування (позначають $\bar{l}_\sigma$) визначають так:

$$l_\sigma(P) = \sum_{i=1}^r p_i l_i, \text{ де } l_i = (\beta_i)$$

і називають *середньою довжиною* кодування σ для розподілу ймовірностей P .

Приклад. Нехай заданий розподіл ймовірностей $P = (0.4, 0.15, 0.15, 0.15)$. Побудуємо код за методом Фаню. Розв’язок подано в табл.

Середня довжина коду дорівнює

$$\bar{l}_F = 0.4 * 2 + 0.15 * 2 + 0.15 * 2 + 0.15 * 3 + 0.15 * 3 = 2.3,$$

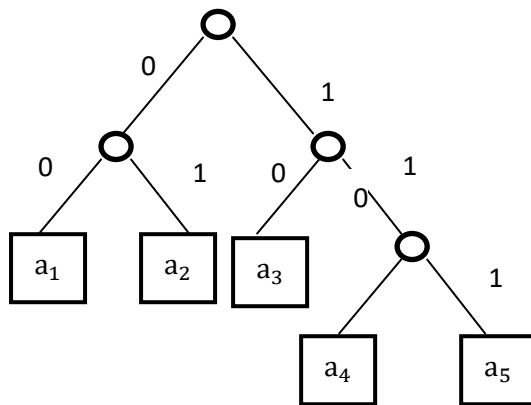
де індекс F означає, що код отриманий за методом Фано.

Букви алфавіту A	Імовірності появи букв	Розбиття множини букв			Елементарні коди
a1	0.4	0	0		00
a2	0.15,		1		01
a3	0.15,	1	0		10
a4	0.15,		1	0	110
a5	0.15,			1	111

Алгоритм Фано має просту інтеграцію за допомогою бінарного дерева. Від кореня відходить два ребра, одне з яких позначене символом 0, друге – символом 1. Ці два ребра відповідають розбиттю множини всіх букв на дві майже рівноймовірні частини, одні з яких ставляють символ 0, а другі – символ 1. Ребра, що виходять із вершини наступного рівня, відповідають розбиттю отриманих частин знову на дві майже рівноймовірні послідовні послідовні частини. Цей процес продовжують до моменту, коли множина букв буде розбита на окремі букви. Кожний листок дерева відповідає деякому елементарному коду. Щоб записати цей код потрібно пройти простий шлях від кореня до відповідного листка.

Зазначимо, що незалежно від способу кодування кожному бінарному дереву відповідає набір двійкових елементарних кодів. У такому разі дерево називають *кодовим*. Якщо елементарні коди відповідають листкам кодового дерева, то відповідна

схема алфавітного кодування є префіксною (отже, забезпечується однозначність декодування).



Питання та завдання до контролю знань студентів

1 Для узагальнення та перевірки засвоєного матеріалу

Що називають оптимальним кодуванням?

Алгоритм кодування методом Фано.

Практичне заняття

з навчальної дисципліни Дискретна математика

Тема Код Хаффмана

Мета заняття Сформулювати уявлення про принципи і методику оптимального кодування

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

Опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2. Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	60 хв	Головне місце приділяється викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень. <i>Поточний контроль на тему «Кодування»</i>
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3], с.302-308	5 хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу</i>

Література

3 Нікольський Ю.В., Пасічник В.В. Дискретна математика: підручник [Текст]/ Ю.В.Нікольський, В.В. Пасічник – Львів: «Магнолія Плюс», 2005. – 608 с.

Навчальні матеріали лекції

Оптимальним кодуванням називають процедуру перетворення символів первинного алфавіту А на кодові комбінації вторинного алфавіту В, при якій середня довжина повідомлення у вторинному алфавіті мінімальна.

Знайти код, який був би оптимальним з усіх точок зору практично неможливо. Код може бути оптимальним лише за певних умов (з точки зору швидкості передачі інформації, здатності виправляти помилки тощо).

Грунтуючись на алгоритмі Хаффмана, можна безпосередньо побудувати кодове дерево оптимального коду. Це дерево називають деревом Хаффмана.

За алгоритмом Хаффмана бінарне дерево яке відповідає оптимальному коду, будують знизу вгору, починаючи з $|A|=r$ листків, у цьому разі виконують $r-1$ злиття. Злиття полягає в побудові нового дерева із двох наявних дерев(або листків) з найменшими ймовірностями. Причому листок або дерева з більшою ймовірністю -

ліве піддерево, а сума ймовірностей лівого й правого піддерев дорівнює ймовірності отриманого дерева(її записують у корінь). Поміщають 0 на ребро до лівого піддерева, а 1 - на ребро до правого піддерева. Список ймовірностей перед кожним злиттям упорядковують за спаданням.

Алгоритм Хаффмана належить до жадібних алгоритмів.

Приклад. Побудуємо дерево Хаффмана для розподілу ймовірностей $P=(0.34, 0.18, 0.17, 0.16, 0.15)$.

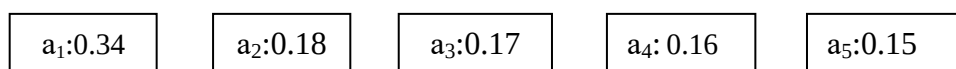
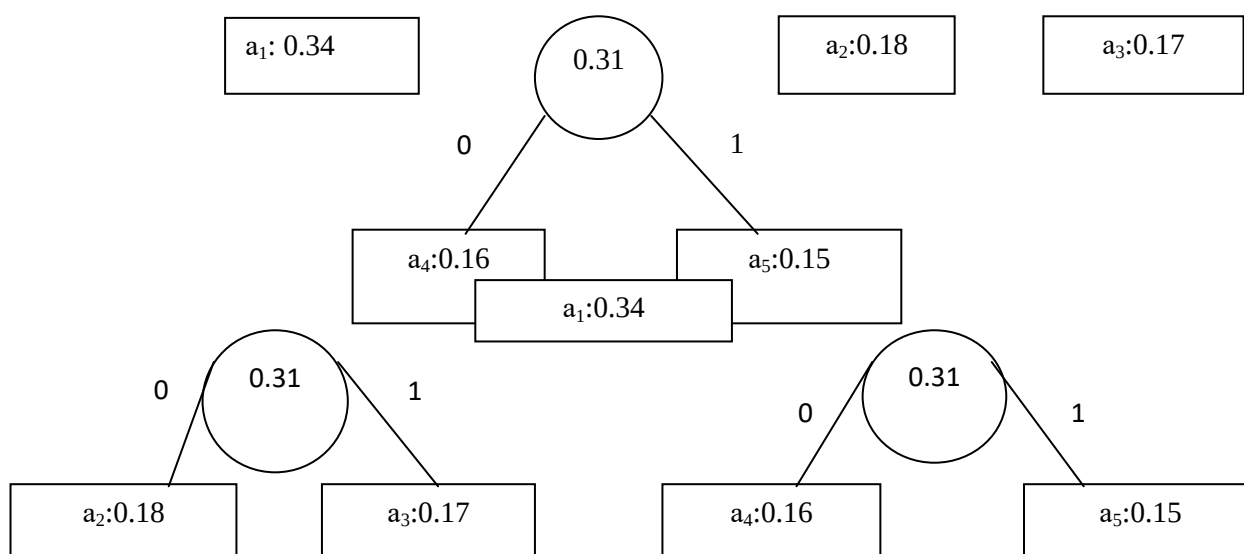


Рис. 7.3



б

Питання та завдання до контролю знань студентів

1 Для узагальнення та перевірки засвоєного матеріалу

Що називають оптимальним кодуванням?

Кодування за алгоритмом Хаффмана.

Практичне заняття

з навчальної дисципліни Дискретна математика

Тема Коди Хемінга

Мета Сформувати уявлення про коди, які стійкі до перешкод і уявлення про один із головних методів кодування – коди Хемінга

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

Опорний конспект

Час – 2 години

План проведення заняття

Структура заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: привітання, визначення присутності студентів на занятті
2. Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3], с.316-324	5 хв	Включає в себе: захист студентами звітів про роботу; підведення підсумків, узагальнення матеріалу видача завдання для самостійної роботи; прибирання робочих місць

Література

3 Нікольський Ю.В., Пасічник В.В. Дискретна математика: підручник [Текст]/ Ю.В.Нікольський, В.В. Пасічник – Львів: «Магнолія Плюс», 2005. – 608 с.

Навчальні матеріали заняття

Коди Хеммінга є одними з найпоширеніших системних кодів, які виправляють помилки. Вони є кодами з мінімальною кодовою відстанню $d_{min} = 3$. Формування r інформаційними елементами у комбінаціях даних кодів виконують за k інформаційними елементами і тому довжина кодової комбінації в них дорівнює $n = k + r$.

При передачі кодового повідомлення може бути спотворений будь-який елемент, кількість таких ситуацій $C_m^1 = n$. До цього слід додати ще одну ситуацію, коли помилка не виникає. Таким чином, загальна кількість 2^r комбінацій перевірних

елементів має перевищувати кількість можливих помилок ситуацій в коді з урахуванням відсутності для правильного розрізнення їх і визначення місць помилки $2^r \geq n + 1$.

Оскільки $2^n = 2^{k+r} = 2^k * 2^r$, то можна записати

$$2^n \geq (n + 1) * 2^k, \quad (1)$$

де 2^n – повна кількість комбінацій коду.

Мінімальне співвідношення коректувальних та інформаційних розрядів, нижче якого код не може зберігати задані коректувальні властивості, визначають виразом $2^r - 1 = n$.

Для розрахунку основних параметрів коду Хеммінга можна задати кількість перевірених елементів r . Тоді з виразу (1) визначають n , а кількість інформації елементів дорівнює $k = n - r$.

Співвідношення між r , n , і k для кодів Хеммінга наведено в табл. 1

Таблиця 1

k	1	1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	10	11	11
r	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	5
n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Для обчислення значень синдрому Хеммінга запропонував розташувати стовпчики так, щоб номер i -го стовпчика первинної матриці $H(n,r)$ і номер розряду кодової комбінації відповідали двійковому поданню числа i . Тоді синдром, знайдений з перевірених рівнянь, буде двійковим поданням номера розряду кодової комбінації, в якій виникла помилка. Для цього перевірні розряди мають знаходитись на номерах позицій, які подаються степенем двійки ($2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{r-1}$) тому, що кожен з них входить тільки до одного з перевірених рівнянь. Таким чином, якщо нумерувати зліва на право, то контрольні символи повинні знаходитися на першій, другій, четвертих позиціях і т.д.

Результат першої перевірки дає цифру молодшого розряду синдрому в двійковому запису. Якщо результат цієї перевірки дасть “1”, то один із символів перевіркової групи спотворений. Таким чином, першою перевіркою повинні бути охоплені символи з номерами, які містять у двійковому запису одиниці в першому розряді

(1,3,5,7,9,11,13,15,...)

$$S_1 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_7 \oplus a_9 \oplus a_{11} \oplus a_{13} \oplus a_{15} \oplus \dots$$

Результат другої перевірки дає цифру другого розряду синдрому. Тому другою перевіркою повинні бути охоплені символи з номерами, які є в двійковому запису одиниці в другому розряді (2,3,6,7,10,11,14,15,...)

$$S_2 = a_2 \oplus a_3 \oplus a_6 \oplus a_7 \oplus a_{10} \oplus a_{11} \oplus a_{14} \oplus a_{15} \oplus \dots$$

Аналогічно, при третій перевірці повинні перевіряти символи, номери яких в двійковому запису мають одиниці в третьому розряді (4,5,6,7,12,13,14,15 і т.д.)

$$S_3 = a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{14} \oplus a_{15} \oplus \dots$$

Таким чином, система рівнянь для визначення синдрому корекції помилки при кодуванні 2048 повідомлень кодом Хеммінга матиме вигляд

$$\left. \begin{aligned} S_2 &= a_2 \oplus a_3 \oplus a_6 \oplus a_7 \oplus a_{10} \oplus a_{11} \oplus a_{14} \oplus a_{15} \\ S_2 &= a_2 \oplus a_3 \oplus a_6 \oplus a_7 \oplus a_{10} \oplus a_{11} \oplus a_{14} \oplus a_{15} \\ S_3 &= a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{14} \oplus a_{15} \\ S_4 &= a_8 \oplus a_9 \oplus a_{10} \oplus a_{11} \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{14} \oplus a_{15} \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Ці суми в рівняннях при правильній передачі повідомлень є завжди парними, а при виникненні помилки – непарними.

Перевірена матриця $H_{15,1}$ коду Хеммінга для випадку приведеної системи рівнянь визначення синдрому має наступний вигляд

$$H_{15,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Питання та завдання до контролю знань студентів

Для узагальнення та перевірки засвоєного матеріалу на лекції

Методи кодування?

Визначення кодів Хеммінга?